On a : $\alpha \equiv \frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{2})\ [2\pi] \equiv 0\ [2\pi]$

Donc T est une translation qui transforme A en C donc $T = t_{\overrightarrow{AC}}$.

c) On a : $R_A(M) = M_1$ donc $R_A^{-1}(M_1) = M$ d'où

$T(M_1) = R_B(R_A^{-1}(M_1)) = R_B(M) = M_2$ d'où $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$ et par suite M_1M_2CA est un parallélogramme .

2°/ a) On a $M_2 = R_B(M)$.

Lorsque M décrit le cercle Γ , de diamètre [AB] alors M_2 décrit le cercle Γ_2 image de Γ par R_B . Γ_2 est le cercle de diamètre [A'B']

où $A' = R_B(A)$ et $B' = R_B(B)$

or $R_B(A) = C$ et $R_B(B) = B$

conclusion : Γ_2 est le cercle de diamètre [BC] .

b) Dans le triangle ABC on a : $\omega_1 = A * B$ et $\omega_2 = B * C$

D'où $\overrightarrow{\omega_1\omega_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (d'après le théorème des milieux)

c) On a : $I = M_1 * M_2$ donc $\overrightarrow{IM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}$

Or $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$ (d'après 1°/ c)) d'où $\overrightarrow{M_2I} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\omega_2\omega_1}$

Et par suite I est l'image de M_2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{\omega_2\omega_1}$.

D'autre part : M_2 décrit le cercle Γ_2 de diamètre [BC] or $\omega_2 = B * C$ donc ω_2 est le centre de Γ_2 .

Et comme $t_{\overrightarrow{\omega_2\omega_1}}(\omega_2) = \omega_1$ alors I décrit le cercle de centre ω_1 et de même rayon que Γ_2 .

Γ et Γ_2 ont le même rayon donc I décrit le cercle de diamètre [AB] .

Conclusion : I décrit le cercle Γ .

Solution 4:

1°/ $S_{(AB)}$ transforme le triangle AKB en AIB or

AKB est un triangle rectangle en K et $S_{(AB)}(K) = I$

alors AIB est un triangle rectangle en I .

d'où $(AI) \perp (BI)$.